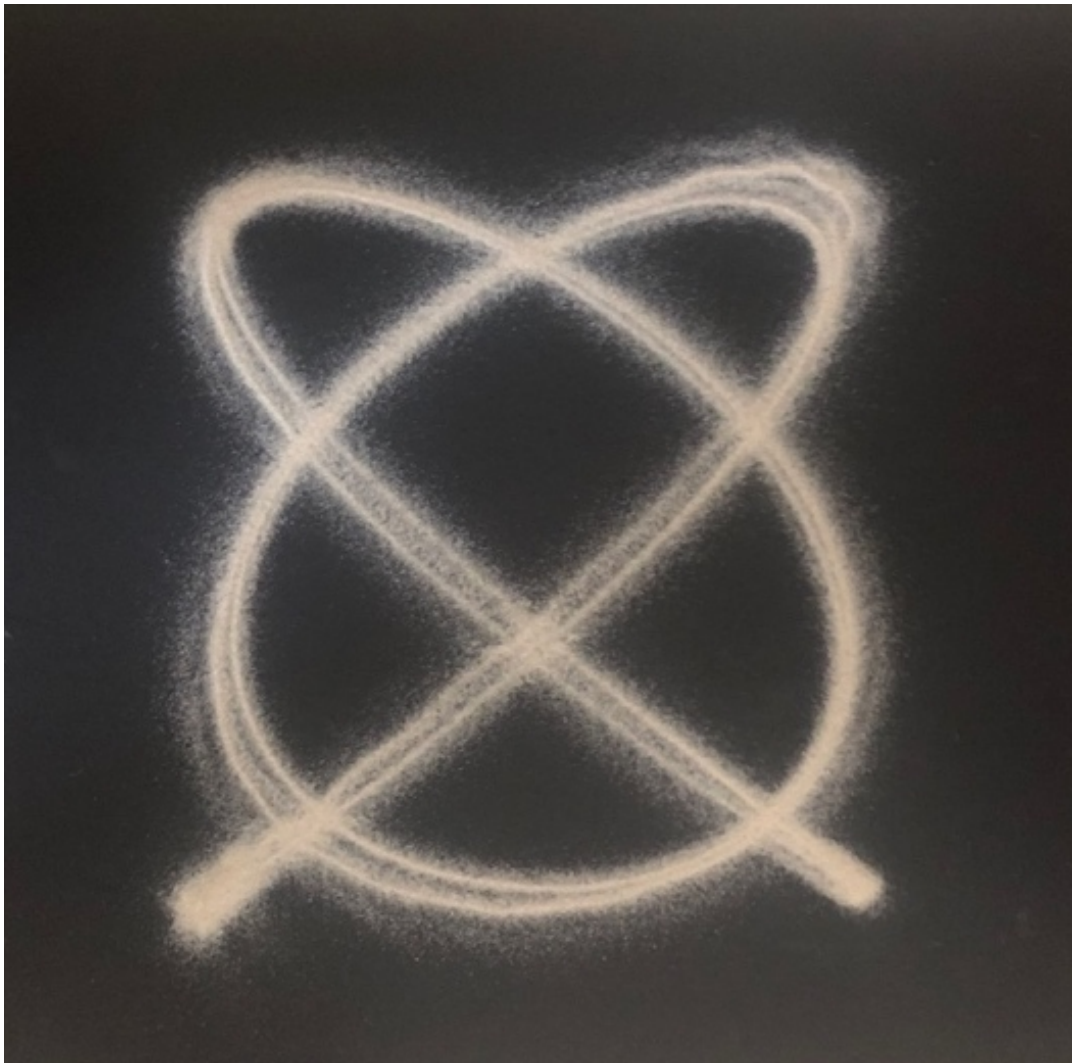


Lissajous-Figuren: Theorie und praktische Umsetzung

Amelie Großrichter



Inhaltsverzeichnis

1. Hinführung	2
2. Theoretischer Hintergrund	3
2.1. Grundlagen der Lissajous Figuren.....	3
2.2. Darstellung von Lissajousfiguren durch GeoGebra-Simulationen.....	4
2.3. Das Oszilloskop.....	6
2.3.1. Funktionsweise des Oszilloskops.....	6
2.3.2. Herstellung von Lissajous Figuren auf dem Oszilloskop.....	6
2.4. Das zweifach aufgehängte Pendel	8
2.4.1. Funktionsweise des zweifach aufgehängten Pendels	8
2.4.2. Herleitung wichtiger Formeln	9
3. Praktische Umsetzung	12
3.1. Anordnung	12
3.2. Versuchsdurchführung.....	14
3.3. Messungen und Ergebnisse	15
3.4. Auswertung.....	16
4. Zusammenfassung	20
5. Literatur- und Abbildungsverzeichnis	21

1. Hinführung

Harmonische Schwingungen begleiten uns im Alltag in vielfältiger Form – man denke nur an die Bewegung eines Uhrpendels oder eine in Schwingung versetzte Stimmgabel. Stellt man sich die Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen vor, so denkt man zunächst an Schwingungen mit paralleler Schwingrichtung, die konstruktiv oder destruktiv interferieren. Was jedoch geschieht bei der Überlagerung von senkrecht zueinanderstehenden harmonischen Schwingungen? Dies zu erforschen, war eine der Leistungen des bekannten französischen Physikers Jules Antoine Lissajous (1822-1880), der den Einfall hatte, mittels Stimmgabeln die Überlagerung orthogonaler harmonischer Schwingungen zu visualisieren. Für seine Untersuchungen erdachte sich Lissajous folgenden Versuch¹ (vgl. Abb. 1):

Ein Lichtstrahl wird auf einen Spiegel ausgerichtet, der an einer Stimmgabel in senkrechter Ebene befestigt ist. Von dort wird der Lichtstrahl auf einen weiteren Spiegel reflektiert, der auf einer horizontal befestigten Stimmgabel montiert ist. Von hier wird der Lichtstrahl wiederum reflektiert und durch ein Fernrohr beobachtet. Beim Schwingen einer der Stimmgabeln bildete sich eine vertikale bzw. horizontale Linie. Als Lissajous beide Stimmgabeln in Schwingung versetzte, bildeten sich Ellipsen, Kreise und kompliziertere Überlagerungskurven, die sog. Lissajous-Figuren.

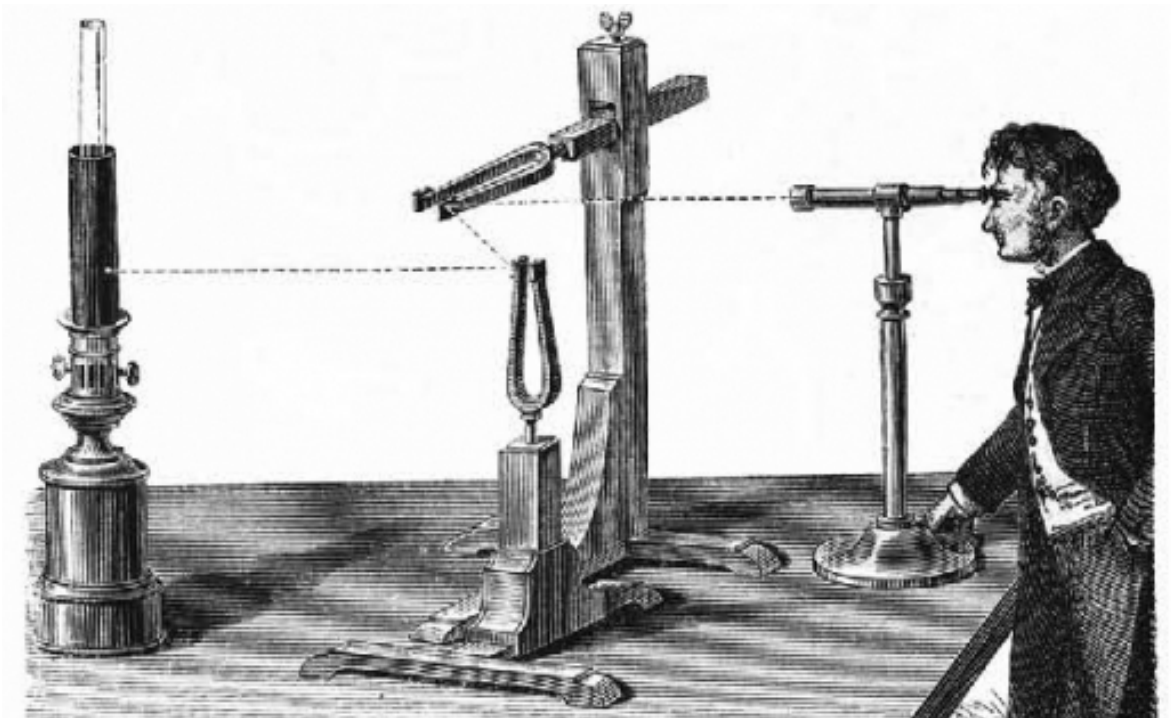


Abbildung 1: Historischer Versuch von Jules Antoine Lissajous.

¹ Hierzu: Greenslade T., Adventures with Lissajous Figures, (Kapitel: Jules Lissajous and his tuning forks, Kindl-Edition ohne Seitenangabe)

2. Theoretischer Hintergrund

2.1 Grundlagen der Lissajous-Figuren

Eine harmonische Schwingung beschreibt eine sich zeitlich periodisch wiederholende Bewegung. Nach der Zeit-Orts-Funktion wird daher der zeitliche Verlauf einer harmonischen Schwingung durch die Sinuskurve

$$s(t) = A \times \sin(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

beschrieben. Dabei ist A Amplitude, ω die Kreisfrequenz/Winkelfrequenz in $\frac{1}{s}$ und φ die Phase in Grad oder RAD.

Nach dem Superpositionsprinzip bzw. Überlagerungsprinzip kann ein Massepunkt jedoch mehrere Schwingungen zugleich ausführen. Bei Kohärenz kommt es zur destruktiven oder konstruktiven Interferenz, demnach heben sich die Schwingungen auf oder verstärken sich.

Überlagert man dagegen zwei harmonische Schwingungen verschiedener Frequenzen, bei denen die Schwingungsrichtungen aufeinander senkrecht stehen, erhält man Lissajous-Figuren. Da die Kurve die Schwingungsebenen in x- und y-Richtung beschreibt, lässt sie sich durch die Parametergleichung

$$\begin{aligned} x &= A_1 \times \sin(\omega_1 t) \\ y &= A_2 \times \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \quad (2)$$

ausdrücken. Das Erscheinungsbild wird durch das Winkelfrequenzverhältnis $\frac{\omega_1}{\omega_2}$, die Phasenverschiebung φ_2 und die Amplituden A_1 und A_2 der harmonischen Schwingungen beeinflusst.

Winkelfrequenz/Kreisfrequenz

Der entscheidende Faktor für das Erscheinungsbild der Lissajous-Figur ist das Frequenzverhältnis der überlagerten Schwingungen. Bei einem rationalen Verhältnis der Frequenzen sind die Lissajous-Figuren geschlossene Kurven. Überlagerungskurven mit einem irrationalen Frequenzverhältnis bilden nicht geschlossene Kurven und überstreichen daher nach einer bestimmten Zeit die gesamte Fläche eines Rechtecks.

Phasenverschiebung

Die beiden Sinusschwingungen sind gegeneinander phasenverschoben, wenn deren Periodendauern zwar übereinstimmen, die Zeitpunkte ihrer Nulldurchgänge aber nicht. Durch Verändern der Phasenverschiebung verschiebt bzw. dreht sich das Erscheinungsbild der Lissajous-Figuren. Dies lässt sich anhand der Überlagerungskurve des Frequenzverhältnisses 1 (vgl. Abb. 2-6) besonders gut ablesen.

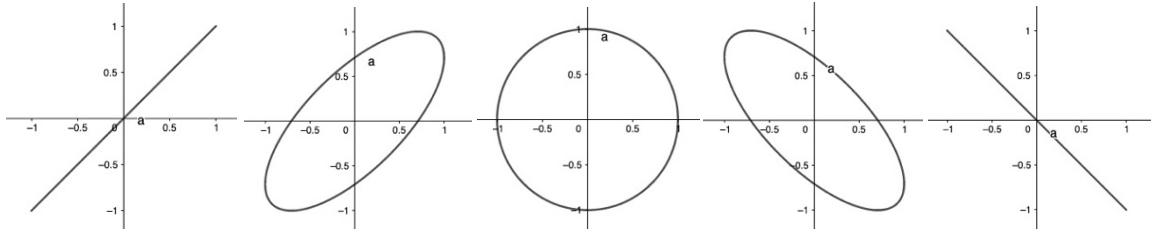


Abbildung 2 (selbsterstellt): Überlagerungskurve der Phasenverschiebung $\varphi_2=0^\circ$

Abbildung 3 (selbsterstellt): Überlagerungskurve der Phasenverschiebung $\varphi_2=45^\circ$

Abbildung 4 (selbsterstellt): Überlagerungskurve der Phasenverschiebung $\varphi_2=90^\circ$

Abbildung 5 (selbsterstellt): Überlagerungskurve der Phasenverschiebung $\varphi_2=135^\circ$

Abbildung 6 (selbsterstellt): Überlagerungskurve der Phasenverschiebung $\varphi_2=180^\circ$

Amplitude

Durch Verändern der Amplituden A_1 und A_2 wird die Lissajous-Figur entsprechend in y- bzw. x-Richtung gedehnt.

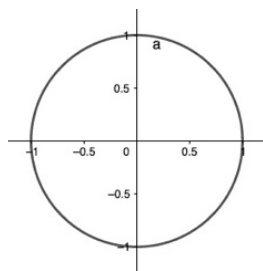


Abbildung 7 (selbsterstellt): Überlagerungskurve bei der gilt $A_1 = A_2$

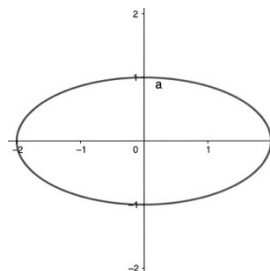


Abbildung 8 (selbsterstellt): Überlagerungskurve bei der gilt $A_1 > A_2$

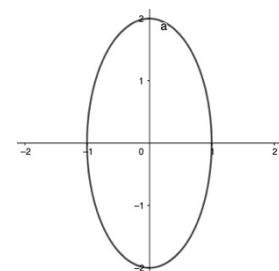


Abbildung 9 (selbsterstellt): Überlagerungskurve bei der gilt $A_1 < A_2$

2.2 Darstellung von Lissajous-Figuren durch

GeoGebra-Simulationen

Durch die GeoGebra Classic 6 Applikation lassen sich die Überlagerungskurven ideal darstellen (als Datei geogebra-lissajous_figuren.ggb auf dem beigefügten Stick).

Im Folgenden werden Lissajous-Figuren verschiedener Frequenzverhältnisse, Phasendifferenz und Amplituden visualisiert und erklärt.

Figur 1:

Die Figur 1 (vgl. Abb. 10) hat das Frequenzverhältnis $\frac{1}{2}$.

Dieses lässt sich durch folgendes Verfahren ermitteln: Zunächst wird die Figur in x- und y-Richtung so verschoben, dass die Koordinatenachsen die Figur an den kleinsten x-Werten bzw. Tiefpunkten berühren. Während des Durchlaufens der Überlagerungskurve wird genau eine Schwingung in x-Richtung vollzogen, bis man an den Ausgangspunkt $x = 0$ gelangt (vgl. Abb. 11),

während in y-Richtung zwei Schwingungen vollendet

werden, indem man $y = 0$ zweimal berührt (vgl. Abb. 12). Die Amplituden betragen in x-Richtung und y-Richtung den Wert 1 und die Phasenverschiebung beträgt $\frac{\pi}{2}$. Die

Parametergleichung lautet somit:

$$\begin{aligned} x &= \sin(1 t) \\ y &= \sin\left(2 t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

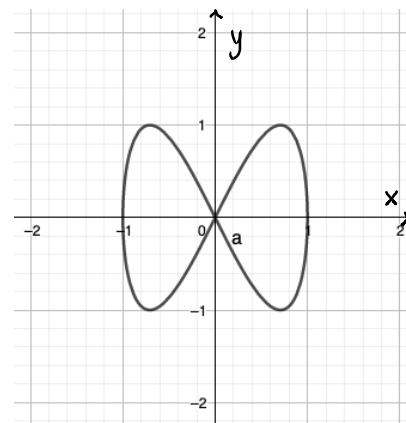


Abbildung 10 (selbsterstellt): Figur 1

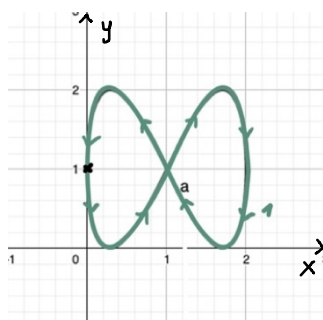


Abbildung 11 (selbsterstellt): Figur 1 mit Verschiebung und Einzeichnung der Schwingung in x-Richtung

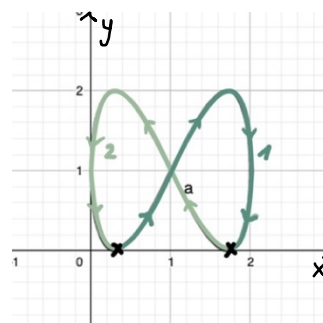


Abbildung 12 (selbsterstellt): Figur 1 mit Verschiebung und Einzeichnung der zwei Schwingungen in y-Richtung

Figur 2:

Das Erscheinungsbild der Figur 2 (vgl. Abb. 13) ist durch die Phasendifferenz $\frac{\pi}{6}$ gedreht.

Das Frequenzverhältnis und die Amplitude in x- bzw. y-Richtung weichen nicht von „Figur 1“ ab. Die Parametergleichung lautet somit:

$$\begin{aligned} x &= \sin(1 t) \\ y &= \sin\left(2 t + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

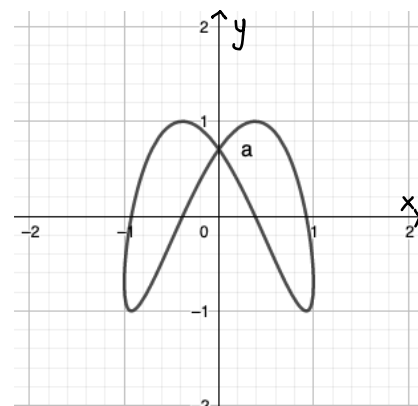


Abbildung 13 (selbsterstellt): Figur 2

Figur 3:

Nach dem bei „Figur 1“ beschriebenen Verfahren erhält man eine Figur (vgl. Abb. 14) des Frequenzverhältnisses $\frac{2}{3}$. Die Überlagerungskurve ist um den Faktor 1,5 in y-Richtung gedehnt. Die Parametergleichung lautet somit:

$$x = \sin(2t)$$
$$y = 1.5 \times \sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$$

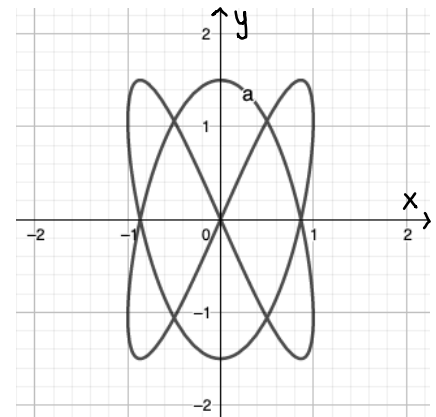


Abbildung 14 (selbsterstellt): Figur 3

2.3 Das Oszilloskop

2.3.1 Funktionsweise des Oszilloskops

Das Messsystem des Elektronenstrahloszilloskops ist die Braun'sche Röhre. Zunächst werden Elektronen durch eine Beschleunigungsspannung von der geheizten Kathode zur Anode beschleunigt. Der Wehnelt-Zylinder dient der Fokussierung, sodass alle Elektronen die Anode durch das Loch passieren. Nach dem Durchlaufen der Anode werden die Elektronen von den Elektronenlinsen zu einem Strahl gebündelt und durch die elektrischen Felder zweier zueinander senkrechten Plattenpaare in x- und y- Richtung abgelenkt. Schließlich trifft der Strahl auf den Leuchtschirm, der die kinetische Energie der Elektronen in Lichtenergie umwandelt.

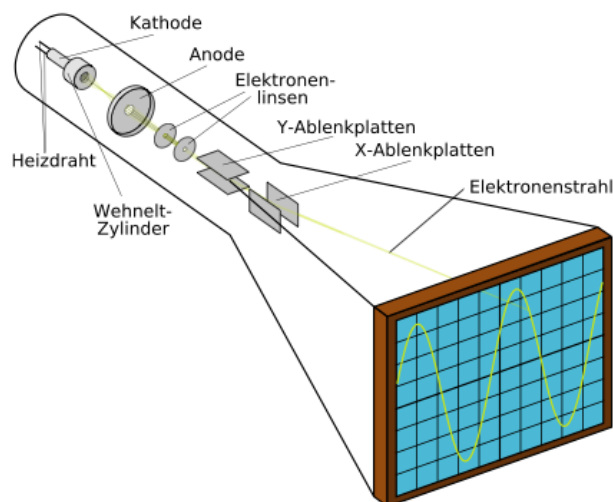


Abbildung 15: Bildröhre eines Elektronenstrahloszilloskops

2.3.2 Herstellung von Lissajous-Figuren auf dem Oszilloskop

Auf dem Oszilloskop lassen sich elektromagnetische Schwingungen senkrecht überlagern, indem die beiden Schwingungen durch den x-y-Modus jeweils an die y- bzw. x-Ablenkplatte anlegt werden. Um verschiedene Frequenzen der Schwingungen

herzustellen, werden die Frequenzen der harmonischen Schwingungen durch zwei Frequenzgeneratoren erzeugt. Auf den Frequenzgeneratoren lassen sich zudem die Amplituden der Figur einrichten. Auf dem Oszilloskop lassen sich die Figuren entlang der Ursprungsgeraden des Koordinatensystems durch die Drehknöpfe x-Pos. und y-Pos. verschieben. Die Phasendifferenz der Figur ändert sich scheinbar konstant ohne Sprünge, was daran zu erkennen ist, dass sich die Lissajous-Figur ständig dreht. In dem Versuchsaufbau (vgl. Abb. 16) ist der linke Frequenzgenerator durch das blaue Kabelpaar an der x-Ablenkplatte und der rechte Frequenzgenerator durch das rote Kabelpaar an die y- Ablenkplatte angelegt.

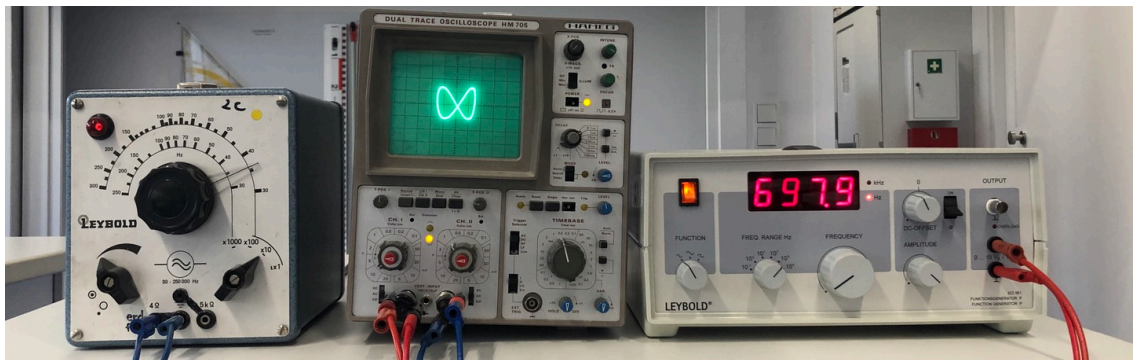


Abbildung 16: Versuchsaufbau mit dem Oszilloskop (eigene Aufnahme)

Durch Anlegen einer Frequenz von 350 Hz in x-Richtung und 697 Hz in y-Richtung ließ sich die Figur des Frequenzverhältnisses von ca. $\frac{1}{2}$ (vgl. Abb. 17) darstellen. Durch eine Frequenz von 950 Hz in x-Richtung und 1263 Hz in y-Richtung wurde eine Lissajous-Figur des Frequenzverhältnisses von ca. $\frac{3}{4}$ (vgl. Abb. 18) erzeugt.

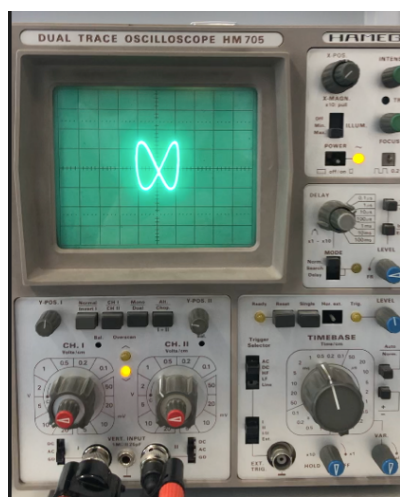


Abbildung 17: Lissajous-Figur des Frequenzverhältnisses $\frac{1}{2}$ am Oszilloskop (eigene Aufnahme)

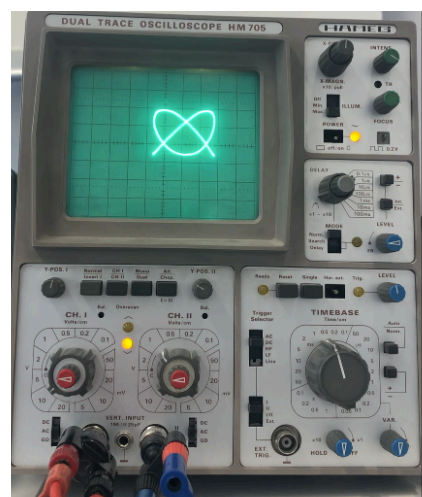


Abbildung 18: Lissajous-Figur des Frequenzverhältnisses $\frac{3}{4}$ am Oszilloskop (eigene Aufnahme)

2.4 Das zweifach aufgehängte Pendel

2.4.1 Funktionsweise des zweifach aufgehängten Pendels

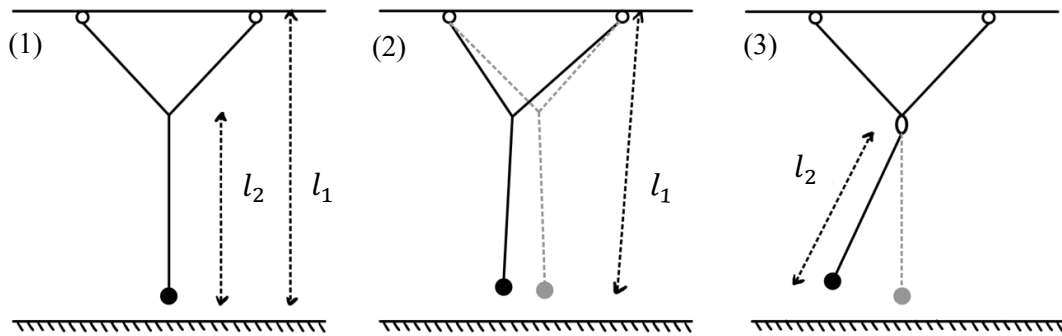


Abbildung 19 (selbsterstellt): selbständig erstellte Skizzen des zweifach aufgehängten Pendels

In der Praxis lassen sich Lissajous-Figuren durch Harmonographen erstellen. Durch diese lassen sich zwei orthogonale harmonische Schwingungen zu Kurvengraphen überlagern. Hierzu wird meist das zweifach aufgehängte Fadenpendel verwendet.² Im Vergleich zum mathematischen Pendel, das eine Schwingung nur auf derselben, vertikalen Ebene ausführen kann, schwingt das zweifach aufgehängte Pendel gleichzeitig in zwei senkrecht zueinanderstehenden Ebenen.

Wie der Name verrät, wird bei der Konstruktion des zweifach aufgehängten Fadenpendels eine Schnur an beiden Enden an zwei Aufhängepunkten aufgehängt. In der Mitte dieses Aufhängefadens wird ein zweiter Faden geknotet, an dem der Pendelkörper befestigt ist. Folglich unterscheiden sich die Fadenlängen in x- Richtung und y-Richtung (1). Dies beeinflusst, wie sogleich im Einzelnen gezeigt wird, das Frequenzverhältnis der überlagerten Schwingungen.

Ausnahmen liegen vor, wenn entweder das Pendel der Gesamtlänge l_1 genau senkrecht zur Aufhängeebene ausgelenkt wird (2), oder wenn der Aufhängefaden fixiert wird und nur der untere Faden der Länge l_2 eine Schwingung ausführt (3). In diesen beiden Fällen schwingt das Pendel auf nur einer Schwingungsebene. Nach diesen Verfahren lassen sich die Schwingungsdauern der beiden überlagerten Schwingungen in x- und y-Richtung isoliert messen. Aus den Schwingungsdauern T_1 und T_2 lässt sich das Frequenzverhältnis

$\frac{f_1}{f_2}$ der überlagerten Schwingungen überprüfen.

² Hierzu und zum Folgenden: Minz N., Seltsame Pendel, in: Kikoin I. K., Physik: Experimentieren als Spielerei, S. 73 ff.

2.4.2 Herleitung wichtiger Formeln

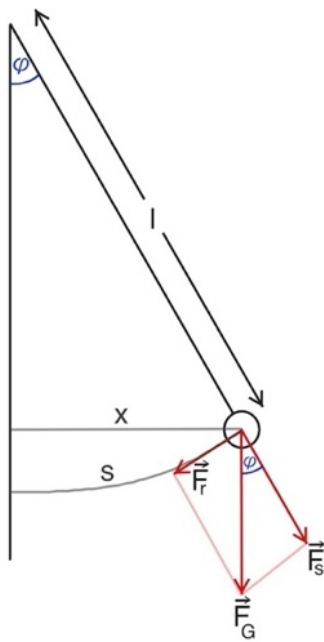


Abbildung 20: Auslenkung eines Fadenpendels

Im Folgenden werden Formeln zur Schwingungsdauer und Frequenz am Fadenpendel hergeleitet.³

Das Fadenpendel besteht aus einem Pendelkörper und einem Faden, an dem dieser aufgehängt ist. Das Pendel wird aus der Gleichgewichtslage um den Winkel φ ausgelenkt und losgelassen. Unter Vernachlässigung der Reibungsverluste betrachtet man nur die Gewichtskraft F_G und die Rückstellkraft F_r , die auf den Pendelkörper wirken.

Die Gewichtskraft als Hypotenuse und die Rückstellkraft als Gegenkathete des Auslenkwinkels bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Daher ergibt sich für die Rückstellkraft:

$$F_r = -F_G \times \sin(\varphi) . \quad (3)$$

Die Rückstellkraft ist negativ, da sie der Auslenkung des Pendels entgegengesetzt ist. Unter Einsetzung der Formel der Gewichtskraft ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$F_r = -m \times g \times \sin(\varphi) . \quad (4)$$

Dabei ist m die Masse des Pendelkörpers und g die Erdbeschleunigung. Aufgrund der Kleinwinkelnäherung

$$\sin(\varphi) = \varphi \quad (5)$$

gilt für kleine Auslenkungen s

$$x = s . \quad (6)$$

Aus der Abbildung ergibt sich daher

$$\sin(\varphi) = \frac{x}{l} . \quad (7)$$

³ Herleitung nach <https://www.leifiphysik.de/mechanik/mechanische-schwingungen/grundwissen/fadenpendel> [Stand 03.11.2020] und http://physik-am-gymnasium.de/Sek1/Kraft_Bewegung/Pendel/fadenpendel_auswertung.html [Stand 04.11.2020]

Durch Einsetzen der Gleichung (7) in die Gleichung (4) erhält man die Formel:

$$F_r = -\frac{m \times g \times s}{l} . \quad (8)$$

Da die Masse m , die Erdbeschleunigung g und die Pendellänge l konstant sind werden diese durch die Richtgröße D zusammengefasst. Aus den Gleichungen (6) und (8) folgt:

$$F_r = -D \times s . \quad (9)$$

Auf der Basis des 2. Axioms von Newton gilt außerdem für die Rückstellkraft F_r :

$$F_r = a(t) \times m = \ddot{s}(t) \times m . \quad (10)$$

Dabei ist die Beschleunigung $a(t)$ die zweite Ableitung der Strecke s nach der Zeit t . Aus der Gleichung (9) folgt daher die elementare Differentialgleichung:

$$\ddot{s}(t) \times m = -D \times s(t) , \quad (11)$$

Für die zweite Ableitung der Gleichung (1) erhält man außerdem:

$$\ddot{s}(t) = -\omega^2 \times s(t) . \quad (12)$$

Aus (11) und (12) folgt für die Winkelfrequenz ω

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} . \quad (13)$$

Zudem gilt für Winkelfrequenz folgende Gleichung:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} . \quad (14)$$

Aus den Gleichungen (13) und (14) lässt sich die Frequenz f einer harmonischen Schwingung eines idealisierten Fadenpendels

$$f = \frac{1}{2\pi} \times \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (15)$$

berechnen.

Die Schwingungsdauer T steht im folgenden Verhältnis zur Frequenz:

$$T = \frac{1}{f}. \quad (16)$$

Daher lässt sich die Schwingungsdauer einer Schwingung am Fadenpendel durch die Gleichung

$$T = 2\pi \times \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (17)$$

bestimmen. Da das zweifach aufgehängte Pendel infolge des Längenverhältnisses $\frac{l_1}{l_2}$ zwei verschiedene harmonische Schwingungen verschiedener Frequenzen ausführt, erhält man auf der Basis der Gleichung (15)

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \times \sqrt{\frac{g}{l_1}}, \quad (18)$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \times \sqrt{\frac{g}{l_2}}. \quad (19)$$

Durch Gleichsetzen von (18) und (19) lässt sich die Längeneinstellung für ein Frequenzverhältnis berechnen:

$$\frac{l_2}{l_1} = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2. \quad (20)$$

3. Praktische Umsetzung

3.1 Anordnung

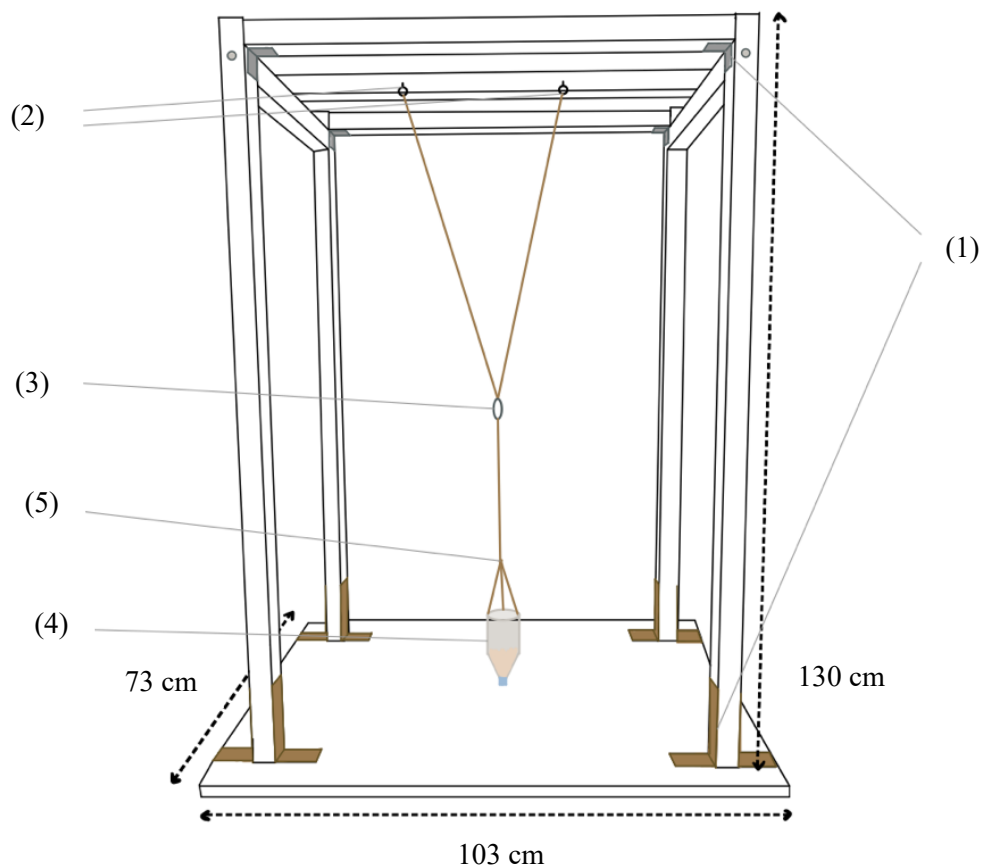


Abbildung 21 (selbsterstellt): selbständig erstellte Skizze des Versuchsaufbaus

Um das zweifach aufgehängte Pendel anbringen zu können, ist eine hölzerne Rahmenkonstruktion auf einer Holzplatte $73,0\text{ cm} \times 103,0\text{ cm} \times 2,0\text{ cm}$ befestigt. Eine alternative Konstruktion, bei der das Pendel an einem „Kran ausleger“ mit nur einer Stütze befestigt wäre, birgt das Risiko, dass der Ausleger selbst in Schwingung gerät, was zu einer ungewollten Überlagerung mit einer anderen Schwingung und zu einer Verzerrung der Lissajous-Figur führen würde. In der Rahmenkonstruktion bilden, um Stabilität zu gewährleisten, vier Holzbalken $130,0\text{ cm} \times 4,0\text{ cm} \times 4,3\text{ cm}$ die Stützen eines Rahmens, der aus zwei Längsstreben $80,0\text{ cm} \times 4,0\text{ cm} \times 4,3\text{ cm}$ und zwei Querstreben $50,0\text{ cm} \times 4,0\text{ cm} \times 4,3\text{ cm}$ besteht. Eine weitere Längsstrebe $90,0\text{ cm} \times 4,0\text{ cm} \times 4,3\text{ cm}$ ist in der Mitte der Querstreben auf dem Rahmen angebracht.

Die Stützen sind auf der Holzplatte in 90-Grad Winkel durch von unten angebrachte, versenkte Schrauben ($80\text{ mm} \times 4\text{ mm}$) mit Verleimung montiert. Die Quer- und Längsstreben sind ebenfalls mithilfe von Verleimung und durch die Stützen gebohrte Schrauben an den Stützen angebracht. Um Eigenschwingungen der Konstruktion zu

minimieren, sind die Stützen auf der Platte und die Streben am Rahmen zusätzlich durch verschraubte Winkel (1) stabilisiert.

Die Aufhängung erfolgt an der zentralen Längsstrebe an zwei Haken (2), die an der Unterseite im Abstand von 28,0 cm zueinander und jeweils 26,0 cm zum Rahmen eingeschraubt sind. Die Aufhängungsschnüre werden in der Mitte zusammengeführt und an diese wird ein leichter Karabiner (3) geknotet, um Versuchsumbauten zu erleichtern. Den Pendelkörper (4) bildet der obere Teil einer durchgesägten Plastikflasche, der mit Sand bzw. Farbe gefüllt ist. In die Deckelmitte ist ein Loch gebohrt, aus dem der Sand oder die Farbe auf ein schwarzes Papier 50 cm × 70 cm fließt. Aus Versuchen hat sich ergeben, dass das Loch über saubere Schnittländer verfügen muss und der Durchmesser mindestens ca. 3 mm betragen muss, um einen regelmäßigen Sand- bzw. Farbfluss zu gewährleisten. In der Plastikflasche sind 1 cm unter der Schnittkante äquidistant drei Löcher gebohrt, durch die drei gleichlange Schnüre geführt wurden, die über der Flaschenmitte zusammengeknotet sind (5). Durch eine weitere Schnur werden diese von unten an den Karabiner angebracht. Die Längeneinstellung des Pendels lässt sich entsprechend des gewollten Frequenzverhältnisses berechnen und umsetzen. Die Gesamtlänge des Pendels der Länge l_1 beträgt 121 cm, da der Abstand der Flasche zur Zeichnungsfläche möglichst klein bzw. 1-2 cm sein muss, um eine klar konturierte Spur der Lissajous-Figur zu erhalten.



Abbildung 22: Versuchsaufbau (eigene Aufnahme)

3.2 Versuchsdurchführung

Zunächst wird die Längeneinstellung des Pendels für das jeweilige Frequenzverhältnis nach der Formel (20) berechnet. Dies sieht beispielsweise für die Figur des Frequenzverhältnisses $\frac{3}{4}$ wie folgt aus:

$$\frac{l_2}{121,0 \text{ cm}} = \left(\frac{3}{4}\right)^2,$$

$$l_2 = 68,1 \text{ cm} \pm 0,3 \text{ cm}.$$

Da sich die Längen nicht genau auf die erste Nachkommastelle einstellen lassen, wird zu diesen die Unsicherheit 0,3 cm hinzugefügt. Nach der Einstellung der Längen wird die Plastikflasche mit Sand gefüllt. Anschließend wird das Loch im Flaschendeckel verschlossen gehalten und das Pendel diagonal ausgelenkt und losgelassen, sodass das Pendel eine Sandspur hinterlässt. Hier muss beachtet werden, dass alle Schnüre gespannt bleiben, um die Figur möglichst präzise herzustellen. Das Sandpendel wird nach einer Schwingung angehalten und das Loch wird mit Klebestreifen versiegelt.

Um das Frequenzverhältnis der beiden überlagerten Schwingungen zu ermitteln, werden die Schwingungsdauern mit einer Stoppuhr gemessen. Hierzu wird das Sandpendel senkrecht zur Aufhängeebene ausgelenkt, um die Schwingungsdauer T_1 des Pendels der Länge l_1 zu messen. Zur Messung von T_2 wird der Aufhängefaden fixiert und zugleich das Pendel der Länge l_2 in Schwingung versetzt. Mit der Stoppuhr werden fünf Schwingungsdauern jeweils von T_1 und T_2 gemessen.

Zur Fehlerabschätzung wird die absolute Unsicherheit angegeben. Hierzu wird der Mittelwert \bar{T} der fünf Einzelwerte und die Schwankung ΔT jeweils berechnet. Dies sieht beispielsweise für die Schwingungsdauer T_1 des Gesamtpendels der Länge l_1 bei dem Frequenzverhältnis $\frac{3}{4}$ wie folgt aus:

$$T_1 = \bar{T}_1 \pm \Delta T_1,$$

$$\bar{T}_1 = \frac{2,11 \text{ s} + 2,17 \text{ s} + 2,18 \text{ s} + 2,19 \text{ s} + 2,21 \text{ s}}{5} = 2,17 \text{ s},$$

$$\Delta T_1 = \frac{2,21 \text{ s} - 2,11 \text{ s}}{2} = 0,05 \text{ s},$$

$$T_1 = 2,17 \text{ s} \pm 0,05 \text{ s}.$$

Dieses Vorgehen wird für drei Lissajous-Figuren der Frequenzverhältnisse $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ wiederholt. Um ein permanentes Ergebnis zu erhalten, wird schließlich die Figur des Frequenzverhältnisses $\frac{4}{5}$ zudem mit roter Farbe hergestellt.

3.3 Messungen und Ergebnisse

Im Folgenden werden die berechneten Längen l_1 und l_2 und die gemessenen Werte für die Schwingungsdauern T_1 und T_2 für drei Figuren der Frequenzverhältnisse $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ tabellarisch zusammengefasst.

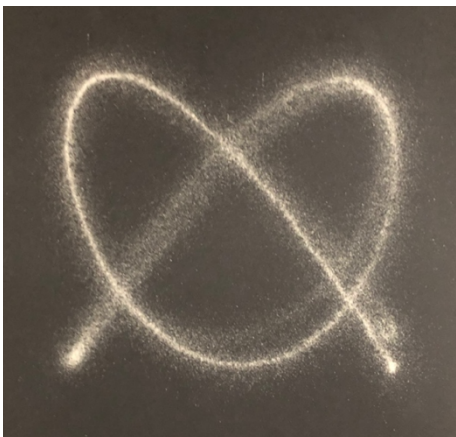


Abbildung 23: Lissajous-Figur 1 („Brenz-Figur“) als Sandspur (eigene Aufnahme)

Figur 1:	(vgl. Abb. 23)
$\frac{f_1}{f_2}$	$\frac{3}{4}$ (festgelegt)
l_1 [cm]	$121,0 \pm 0,3$ (eingestellt)
l_2 [cm]	$68,1 \pm 0,3$ (eingestellt)
T_1 [s]	<u>$2,17 + 0,05$</u> (gemessen)
T_2 [s]	<u>$1,63 + 0,03$</u> (gemessen)

Für T_2 der Figur 1 wurden die Schwingungsdauern 1,59 s, 1,61 s, 1,63 s, 1,65 s, und 1,65 s gemessen.

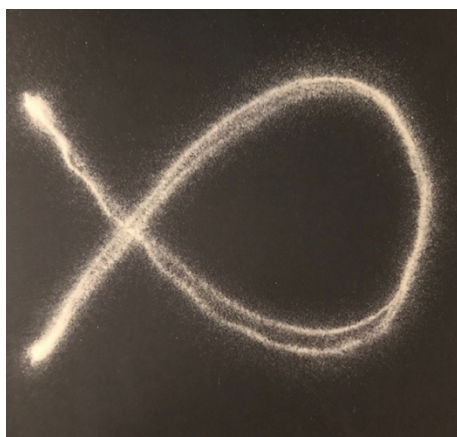


Abbildung 24: Lissajous-Figur 2 („Fisch-Figur“) als Sandspur (eigene Aufnahme)

Figur 2:	(vgl. Abb. 24)
$\frac{f_1}{f_2}$	$\frac{2}{3}$
l_1 [cm]	$121,0 \pm 0,3$
l_2 [cm]	$53,7 \pm 0,3$
T_1 [s]	<u>$2,17 + 0,04$</u>
T_2 [s]	<u>$1,43 + 0,03$</u>

Bei Figur 2 wurden für T_1 die Schwingungsdauern 2,14 s, 2,15 s, 2,17 s, 2,19 s, und 2,21 s, für T_2 die Schwingungsdauern 1,40 s, 1,42 s, 1,45 s, 1,45 s, und 1,46 s gemessen.

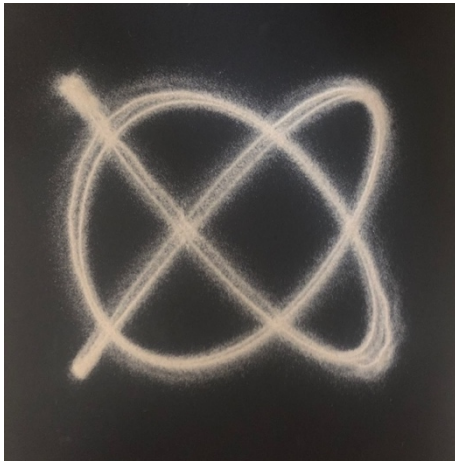


Abbildung 25: Lissajous-Figur 3 als Sandspur (eigene Aufnahme)

Figur 3:	(vgl. Abb. 25)
$\frac{f_1}{f_2}$	$\frac{4}{5}$
l_1 [cm]	$121,0 \pm 0,3$
l_2 [cm]	$77,4 \pm 0,3$
T_1 [s]	<u>$2,19 \pm 0,03$</u>
T_2 [s]	<u>$1,72 \pm 0,04$</u>

Bei Figur 3 wurden für T_1 die Schwingungsdauern 2,17 s, 2,17 s, 2,18 s, 2,20 s und 2,23 s, für T_2 die Schwingungsdauern 1,68 s, 1,69 s, 1,71 s, 1,74 s, und 1,76 s gemessen.

Für die Herstellung der Figur 3 mit Farbe (vgl. Abb. 26) wurde die gleiche Längeneinstellung verwendet und es ergaben sich die gleichen Messdaten.

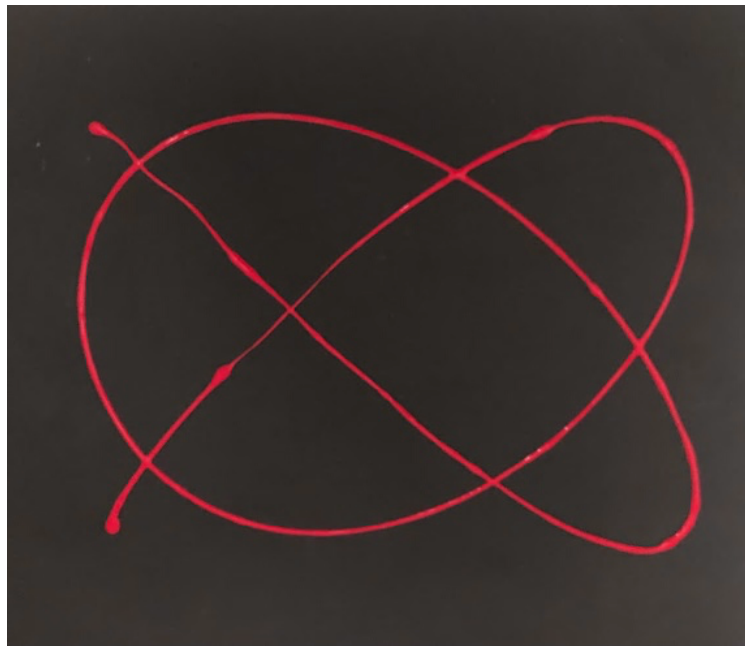


Abbildung 26: Lissajous-Figur 3 als Farbspur (eigene Aufnahme)

3.4 Auswertung

Im Folgenden wird nachgeprüft, ob die Figuren die berechneten Frequenzverhältnisse $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ aufweisen. Die Auswertung der Ergebnisse erfolgt durch zwei Methoden. Zunächst wird das Frequenzverhältnis $\frac{f_1}{f_2}$ der einzelnen Figuren durch die gemessenen

Schwingungsdauern T_1 und T_2 jeweils nachgeprüft. Anschließend wird das Frequenzverhältnis der Schwingungen anhand des Erscheinungsbilds der Lissajous-Figur nachvollzogen.

Aus der Gleichung (16) erhält man für die Schwingungsdauern T_1 und T_2 und den Frequenzen f_1 und f_2 der überlagerten Schwingungen folgende Gleichung:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{f_1}{f_2}.$$

Die Unsicherheit des Frequenzverhältnisses lässt sich mit der Größtfehler-Methode durch die Formel

$$\Delta\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{\frac{T_{2max}}{T_{1min}} - \frac{T_{2min}}{T_{1max}}}{2}$$

berechnen. Mittels der Schwingungsdauern lassen sich die Frequenzverhältnisse der jeweiligen Figuren wie folgt berechnen:

Figur 1:

$$\Delta\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{\frac{1,63 + 0,03 \text{ s}}{2,17 - 0,05 \text{ s}} - \frac{1,63 - 0,03 \text{ s}}{2,17 + 0,05 \text{ s}}}{2} = 0,031 \approx 0,04$$
$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(1,63 \pm 0,03) \text{ s}}{(2,17 \pm 0,05) \text{ s}} = 0,75 \pm 0,04 \hat{=} \frac{3}{4}$$

Da $\frac{3}{4}$ im Bereich $0,75 \pm 0,04$ liegt, stimmt der aus den Schwingungsdauern berechnete Wert mit dem gewollten Wert überein.

Figur 2:

$$\Delta\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 0,024 \approx 0,03$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(1,43 \pm 0,03) \text{ s}}{(2,17 \pm 0,04) \text{ s}} = 0,65 \pm 0,03 \hat{=} \frac{2}{3}$$

Da $\frac{2}{3}$ im Bereich $0,65 \pm 0,03$ liegt, stimmt der aus den Schwingungsdauern berechnete Wert mit dem gewollten Wert überein.

Figur 3:

$$\Delta\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 0,029 \approx 0,03$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(1,72 \pm 0,04)s}{(2,19 \pm 0,03)s} = 0,79 \pm 0,03 \cong \frac{4}{5}$$

Da $\frac{4}{5}$ im Bereich $0,79 \pm 0,03$ liegt, stimmt der aus den Schwingungsdauern berechnete Wert mit dem gewollten Wert überein.

Sodann wird das Frequenzverhältnis der Figur anhand ihres Erscheinungsbilds erklärt. Dieses kann anhand der Figur geprüft werden, indem man betrachtet, wie viele Schwingungen das Pendel in x- und y-Richtung macht, bis es wieder an den Ausgangspunkt P_A gelangt, wo gilt $x = 0$ und $y = 0$. Dabei wird hier als Schwingung die Strecke bis zu dem Punkt bezeichnet, bei dem das Pendel die y- bzw. x-Achse berührt. Die erste Schwingung in x-Richtung ist mit grüner Farbe und in y-Richtung mit roter Farbe eingezeichnet.

Figur 1 (vgl. Abb. 27): In x-Richtung, in der das Pendel die Schwingungsdauer T_1 hatte, vollzieht das Pendel jeweils eine Schwingung, bis es wieder die y-Achse berührt. Das Pendel vollendet daher, bis es an den Ausgangspunkt P_A , zurückkehrt in x-Richtung 3 Schwingungen. In y-Richtung wird eine Schwingung vollendet, wenn das Pendel wieder die x-Achse berührt. Bis das Pendel wieder an den Ausgangspunkt P_A gelangt, werden in y-Richtung 4 Schwingungen vollzogen. Da in x-Richtung 3 Schwingungen und in y-Richtung 4 Schwingungen zugleich vollendet werden, folgt für Figur 1 das Frequenzverhältnis $\frac{3}{4}$.

Das Frequenzverhältnis lässt sich alternativ durch folgende Methode ablesen. Durch Zentrieren der Figur auf den Koordinatenachsen schneidet die Pendelbewegung bei einem Durchlauf der Figur die x-Achse 4-mal und die y-Achse drei-mal. (vgl. Abb. 28).

Auch hieraus ergibt sich das Frequenzverhältnis $\frac{3}{4}$.

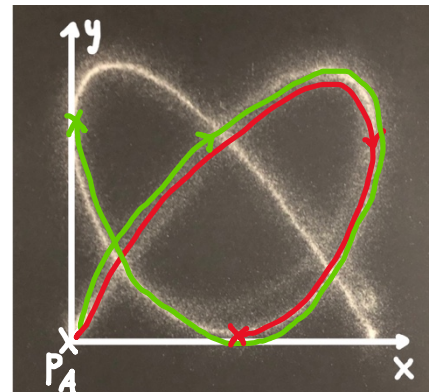


Abbildung 27: Lissajous-Figur 1 mit eingezeichnetem Koordinatensystem

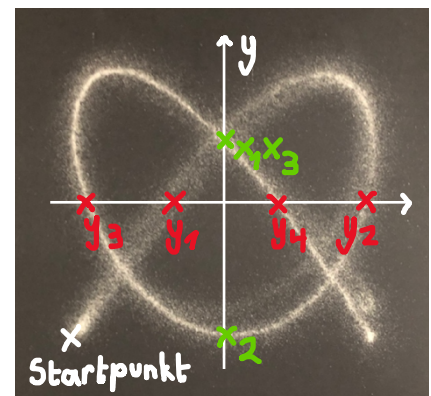


Abbildung 28: Lissajous-Figur 1 zentriert auf den eingezeichneten Koordinatenachsen

Figur 2 (vgl. Abb. 29): Das Pendel vollendet jeweils eine Schwingung in x-Richtung, bis es wieder die y-Achse berührt. In y-Richtung wird eine Schwingung vollendet, wenn das Pendel wieder die x-Achse berührt. Bis das Pendel wieder an den Ausgangspunkt P_A gelangt, vollzieht es in x-Richtung 2 und in y-Richtung 3 Schwingungen. Hieraus folgt für Figur 2 das Frequenzverhältnis $\frac{2}{3}$.

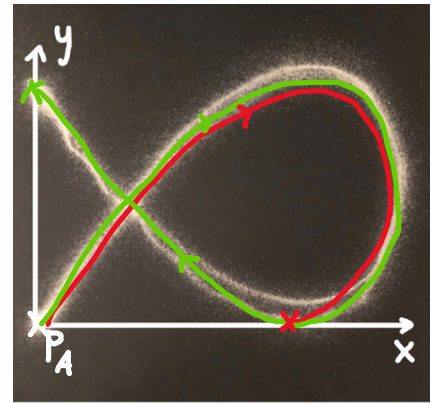


Abbildung 29: Lissajous-Figur 2 mit eingezeichnetem Koordinatensystem

Figur 3 (vgl. Abb. 30): Das Pendel vollendet jeweils eine Schwingung in x-Richtung, bis es wieder die y-Achse berührt. In y-Richtung wird eine Schwingung vollendet, wenn das Pendel wieder die x-Achse berührt. Bis das Pendel wieder an den Ausgangspunkt P_A gelangt, vollzieht es in x-Richtung 4 und in y-Richtung 5 Schwingungen. Hieraus folgt für Figur 3 das Frequenzverhältnis $\frac{4}{5}$.

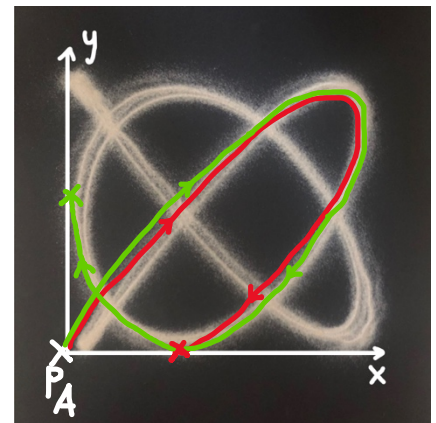


Abbildung 30: Lissajous-Figur 3 mit eingezeichnetem Koordinatensystem

Aufgrund der Reibung und der Eigenmasse der Seile und des Karabiners weichen die Werte für den Zusammenhang $\frac{T_2}{T_1}$ minimal von dem Frequenzverhältnis $\frac{f_1}{f_2}$ ab. Dies hat jedoch keinen erheblichen Einfluss auf das Pendel, was man daran erkennt, dass das

Pendel mehrere Schwingungen ohne starke Abweichungen von der Spur ausführen kann. Ein weiterer Faktor für die Abweichung von dem gewollten Wert bildete die Längeneinstellung, bei der die kleinste Ungenauigkeit zu stark verzerrten und unpräzisen Figuren führte (vgl. Abb. 31). Außerdem wurde bei der Bestimmung von der Länge l_1 der Massenschwerpunkt des Pendelkörpers vernachlässigt, wodurch l_1



Abbildung 31: Beispiel einer verzerrten und unpräzisen Lissajous-Figur des Frequenzverhältnisses $\frac{3}{4}$ (eigene Aufnahme)

länger ist als die ideale Länge des Gesamtpendels. Allerdings gab es keine systematischen Abweichungen bei den Ergebnissen, was beweist, dass dies vernachlässigbar ist. Zudem gilt die verwendete Formel zur Längenberechnung nur für kleine Auslenkungen aufgrund

der Kleinwinkelnäherung. Gleichwohl gelingt anhand des vorgestellten Aufbaus eine präzise Darstellung der Lissajous-Figuren.

Die Herstellung von Figur 3 mit Farbe (vgl. Abb. 26) weist mehr Schwierigkeiten in der praktischen Durchführung auf; nach deren Überwindung lässt sich jedoch die gleiche Figur auch mit dieser Methode herstellen. Zu beachten ist die Konsistenz der Farbe, die nicht zu zähflüssig oder zu wässrig sein darf, um eine angemessene Fließgeschwindigkeit zu gewährleisten. Nach vier Versuchen mit verschiedenen Konsistenzen der Farbe konnte die richtige Fließgeschwindigkeit eingestellt werden, wodurch Figur 3 in permanenter Form zur Dokumentation des obigen Ergebnisses hergestellt werden konnte.

4. Zusammenfassung

Diese wissenschaftliche Arbeit hat den theoretischen Hintergrund der Lissajous-Figuren untersucht und diese durch eine praktische Herstellung experimentell nachvollzogen. Zunächst waren als theoretische Basis die Definition und Parametergleichung der Lissajous-Figuren darzustellen. Daraufhin wurden die Einflüsse der Phasenverschiebung, der Winkelfrequenz und der Amplitude auf das Erscheinungsbild der Lissajous-Figuren dargelegt und mittels GeoGebra-Simulationen erklärt. Nach einer kurzen Erläuterung der Funktionsweise des Oszilloskops wurden mit diesem sodann Lissajous-Figuren der Frequenzverhältnisse $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{2}$ hergestellt. Anschließend wurde die Funktionsweise des zweifach aufgehängten Pendels dargestellt. Daraufhin wurden die Formeln für die Längeneinstellungen des Pendels und Messung der jeweiligen Schwingungsdauern hergeleitet, um Lissajous-Figuren verschiedener Frequenzen experimentell herzustellen.

Für die praktische Erprobung wurde eine stabile Rahmenkonstruktion für ein zweifach aufgehängtes Pendel errichtet. Mit diesem wurden aus Sand Lissajous-Figuren der Frequenzverhältnisse $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ erzeugt und ausgewertet. Aus den Messungen und Sandspuren der Figuren konnten die Frequenzverhältnisse der Figuren bestätigt werden. Zusätzlich wurde die Figur des Frequenzverhältnisses $\frac{4}{5}$ mit Farbe hergestellt.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass sich die Lissajous-Figuren durch GeoGebra-Simulationen und das Oszilloskop ideal darstellen ließen, sie aber durch einen genau geplanten und sorgfältig konstruierten Aufbau für ein zweifach aufgehängtes Fadenpendel auch mechanisch mit großer Genauigkeit erzeugt werden konnten. Die dabei gemessenen Werte ergaben Frequenzverhältnisse, die denjenigen entsprachen, die nach der theoretischen Herleitung zu erwarten waren, und bestätigten diese damit.

5. Literatur- und Abbildungsverzeichnis

Bibliographie

Demtröder, W. (2015): Experimental Physik 1: Mechanik und Wärme, 7. Auflage, Heidelberg, (Springer Spektrum)

Greenslade T. (2018): Adventures with Lissajous Figures, San Rafael (Morgan & Claypool)

Minz, N. (1991): Seltsame Pendel, in: Kikoin, I. K. (Hrsg.), Physik: Experimentieren als Spielerei, Heidelberg (Spektrum d. Wissenschaften Verlagsgesellschaft), S. 73-84

Elektronische Veröffentlichungen

Rebecca Drutschmann, Humboldt-Universität zu Berlin (2018): Physikalische Schulexperimente Online, URL:

https://www.physikalische-schulexperimente.de/physo/Lissajous-Figuren_aus_Sand#Durchf.C3.BChrung

Jörn Schneider, Physik am Gymnasium.de (2018): Herleitung der Formel, URL:

http://physik-am-gymnasium.de/SekI/Kraft_Bewegung/Pendel/fadenpendel_auswertung.html

Leifi Physik, Fadenpendel (Zugriff am 03.11.2020), URL:

<https://www.leifiphysik.de/mechanik/mechanische-schwingungen/grundwissen/fadenpendel>

Sonstige Materialien

Fakultät für Physik der Ludwig-Maximilians-Universität München, Grundpraktika (2020): Messen mit Unsicherheiten (MUS) – für Studierende der Life Sciences

Abbildungen

Übernommene Abbildungen (Fremdquellen):

Abb. 1: <https://books.openedition.org/editionscnrs/2741>

Abb. 15: <https://docplayer.org/7449736-Mi-26-1-und-mi-2-feb-2012-19-30-uhr-workshop-bei-dl0wh-einfuehrung-in-den-umgang-mit-dem-oszilloskop.html>

Abb. 20: <https://physikunterricht-online.de/jahrgang-11/das-fadenpendel/>

Anlagen

USB-Stick mit Datei geogebra-lissajous_figuren.ggb (GeoGebra-Simulationen)

Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die Seminararbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

....., den

.....